CAPES externe de mathématiques 2025, composition 1

Cette épreuve est constituée de trois problèmes indépendants.

Notations
$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls.
$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}^*$ désigne l'ensemble des nombres réels non nuls.

Problème 1 : VRAI – FAUX

Pour chacun des items suivants, préciser si l'assertion finale est vraie ou fausse et justifier la réponse donnée. Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

Calculs dans $\mathbb{R}$

1. Un article taxé à 10% a été payé 110 euros TTC (toutes taxes comprises).
   Le montant de la taxe est de 11 euros.

2. Soient α et β deux nombres réels.
   Le nombre $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ est positif.

3. Soient a et b deux nombres réels.
   La négation de $(a > 1 \text{ et } b > 1 \Rightarrow a + b > 2)$ est $(a \leq 1 \text{ ou } b \leq 1 \Rightarrow a + b \leq 2)$.

4. On considère l'équation d'inconnue réelle x : $\cos(2025x) = 1$.
   Cette équation admet 2025 solutions dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.

Arithmétique

5. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'application définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $f(n) = 8n^2 - 10n + 3$.
   L'application f est injective.

6. Pour tout entier naturel n, $2^{3n} - 1$ est divisible par 7.

7. Soient a, b et n trois entiers naturels avec n non nul tels que a est congru à b modulo n.
   Pour tout entier x, on a $x^a \equiv x^b \; [n]$.

8. Soit n un entier strictement positif.
   La somme des carrés des n premiers entiers naturels non nuls est égale à $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Analyse réelle

9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -4\, u_n$.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.
    La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'admet pas de limite.

11. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels admettant une limite finie strictement positive.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang.

12. Soit f une fonction définie et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit u_0 un réel et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de premier terme u_0 et telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

13. L'équation $\mathrm{e}^x = x + 1$ admet 0 comme unique solution sur $\mathbb{R}$.

14. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, a un réel de I et f une fonction, définie sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Si f est continue en a, alors f est dérivable en a.

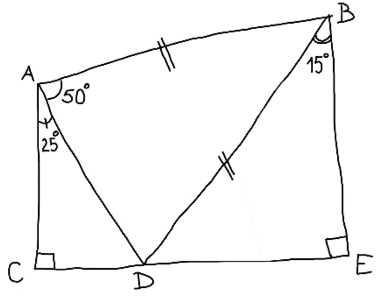
15. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t}dt$.
La fonction f est bornée sur $[0\,;+\infty[$.

16. Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $I_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x}dx$.
La suite (I_n) est croissante.

17. Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $I_n = \int_1^{\mathrm{e}} t\big(\ln(t)\big)^n dt$.
Pour tout entier naturel n non nul, $I_{n+1} = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^2 + (n+1)I_n)$.

Géométrie

18. La figure codée ci-contre, réalisée à main levée, représente une configuration géométrique du plan affine euclidien.
Les points C, D et E de cette configuration sont alignés.

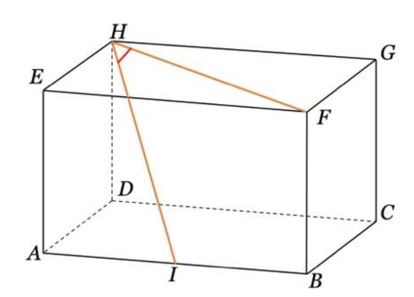


19. On considère un triangle ABC du plan affine euclidien tel que $AB = 4$, $BC = 8$ et $CA = 4\sqrt{3}$.
L'angle géométrique $\widehat{ABC}$ mesure $\frac{\pi}{3}$ radians.

20. Dans un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan, on considère les points $A(1\,;2)$, $B(3\,;1)$ et $M(5x\,;x^2-1)$ où x est un nombre réel.
Les points A, B et M sont alignés si et seulement si $x = 1$.

21. On considère un plan (P) de l'espace et trois points A, B et C non alignés n'appartenant pas à (P), tels que la droite (AB) coupe (P) en C', la droite (BC) coupe (P) en A' et la droite (AC) coupe (P) en B'.
Les points A', B' et C' sont alignés.

22. On considère un pavé droit *ABCDEFGH* d'un espace affine euclidien de dimension 3, avec $AB = 5$, $AD = 4$ et $AE = 3$ et I le milieu de $[AB]$, conformément à la figure ci-contre.
La mesure de l'angle $\widehat{FHI}$ arrondie au degré près est 45°.



23. Le nombre complexe $e^{2i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{2}}$ admet $\frac{\pi}{12}$ pour argument.

Algèbre linéaire

24. Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel muni d'un produit scalaire et de la norme associée notée $\|.\|$.
Deux vecteurs u et v de E sont orthogonaux si et seulement si $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

25. On considère la matrice A de $M_2(\mathbb{C})$, définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
Le produit des valeurs propres de A est égal à 2.

26. On considère une matrice carrée A de taille n diagonalisable ($n \in \mathbb{N}^*$).
La matrice A^2 est diagonalisable.

Dénombrement et probabilités

27. 20 personnes, dont 13 femmes, sont convoquées à un entretien.
Les candidats sont reçus individuellement. La liste fixant l'ordre de passage a été établie par un tirage au sort équiprobable parmi l'ensemble des listes possibles.
La probabilité que le deuxième candidat interrogé soit une femme sachant que le premier candidat interrogé est une femme est égale à $\frac{12}{19}$.

28. On lance trois dés à six faces numérotées de 1 à 6 et on fait la somme des résultats obtenus.
Le programme ci-dessous est écrit en langage Python.

```
1   from math import*
2   n=int(input("Entrez un entier compris entre 3 et 18 :"))
3   s=0
4   for i in range(1,7):
5     for j in range(1,7):
6       for k in range(1,7):
7         if i+j+k==n:
8           print(i,j,k)
9   s=s+1
10  print("Le nombre de façons d'obtenir",n,"avec trois dés est :",s)
```

La ligne 10 de ce programme donne le nombre de façons d'obtenir pour somme l'entier n, saisi par l'utilisateur.

Problème 2 : meilleure approximation affine

Ce problème a pour objet de s'intéresser à la notion de meilleure approximation affine d'une fonction en un point.

Définitions

Soit f une fonction d'une variable réelle, définie sur un intervalle ouvert non vide I .
Pour tout réel $a \in I$, on appelle *approximation affine de f en a* toute fonction affine g définie sur I telle que

$$g(a) = f(a).$$

Soient g_1 et g_2 deux approximations affines de f en a. Dire que g_1 est *une meilleure approximation affine de f en a que g_2* signifie qu'il existe un intervalle ouvert D contenant a tel que

$$\forall x \in I \cap D,\ |f(x) - g_1(x)| \leqslant |f(x) - g_2(x)|.$$

Si de plus f est dérivable sur I de dérivée f', pour tout $a \in I$, on appelle fonction affine tangente de f au point a la fonction t définie sur I par

$$\forall x \in I,\ \ t(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Étude d'un exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - x$$

1. Étudier la dérivabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
3. Déterminer la fonction t affine tangente à f en 0. Tracer la tangente en 0 sur la figure précédente.
4. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = -\frac{1}{2}x.$$

4.1 Justifier que h est une approximation affine de f en 0. Tracer la courbe représentative de h sur la même figure.

4.2 Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad |f(x) - t(x)| \leqslant |f(x) - h(x)| \Leftrightarrow |x| \leqslant \left|x - \frac{1}{2}\right|$$

4.3 En déduire que t est une meilleure approximation affine de f en 0 que h.

5. Pour tout réel $k \neq -1$, on note g_k la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g_k(x) = kx.$$

5.1 Justifier que g_k est une approximation affine de f en 0.

5.2 Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x) - t(x)| \leqslant |f(x) - g_k(x)| \Leftrightarrow |x| \leqslant |x - (1 + k)|.$$

5.3 Démontrer que

$$\forall x \in \left] -\left|\frac{1+k}{2}\right|, \left|\frac{1+k}{2}\right| \right[, |f(x) - t(x)| \leqslant |f(x) - g_k(x)|.$$

6. Que peut-on en conclure pour la fonction t ?

Cas général

On suppose ici que $I = \mathbb{R}$ et que la fonction f est dérivable sur I.

7. Démontrer que g est une approximation affine de f en a si et seulement si

$$\exists k \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}\ g(x) = f(a) + k(x - a).$$

Soit g une approximation affine de f en a telle que $k \neq f'(a)$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{a\}$,

$$T(x) = \frac{f(x) - t(x)}{x - a}$$
$$G(x) = \frac{f(x) - g(x)}{x - a}.$$

8. Déterminer les limites des fonctions T et G en a.
9. Que peut-on en conclure pour la fonction t ?

Relation d'ordre

10. Rappeler la définition d'une relation d'ordre.
11. Soient f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un élément de I.

    La relation « être une meilleure approximation affine de f en a que » constitue-t-elle une relation d'ordre dans l'ensemble des approximations affines de f en a ?

Problème 3 : dérangements

Ce problème a pour objet de déterminer le nombre de dérangements d'un ensemble fini.

Notations, définitions et rappels

Soit n un entier naturel non nul et soit E_n le sous ensemble de $\mathbb{N}$ défini par $E_n = \{1,2,\cdots,n\}$.

On appelle permutation de E_n toute bijection de E_n dans lui-même. Soit σ une permutation de E_n et i un élément de E_n. Dire que i est un point fixe de σ signifie que $\sigma(i) = i$.
On appelle *dérangement* de E_n une permutation de E_n n'ayant aucun point fixe.

On note S_n l'ensemble des permutations de E_n.
On rappelle que le cardinal de S_n est $n!$.
On note D_n l'ensemble des dérangements de E_n.
Le cardinal de D_n est noté d_n.

Généralités

Dans cette partie, E désigne un ensemble fini non vide.
A_1, A_2 et A_3 sont des parties de E.

1. Justifier l'égalité

$$\mathrm{card}(A_1 \cup A_2) = \mathrm{card}(A_1) + \mathrm{card}(A_2) - \mathrm{card}(A_1 \cap A_2)$$

   où *card* désigne le cardinal des ensembles considérés.

2. En s'inspirant de la relation précédente et en illustrant la réponse par un schéma, donner sans démonstration une expression de $\mathrm{card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$, en fonction des cardinaux des intersections de ces parties.

Dans la suite, on admettra la *formule du crible* ci-dessous qui constitue une généralisation des deux précédentes.

Étant données n parties $A_1, A_2, \ldots A_n$ d'un ensemble E fini non vide, on a

$$\mathrm{card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n} \mathrm{card}\big(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\big)\right)$$

3. Retrouver à l'aide de la formule du crible la réponse obtenue à la question 2.

Calcul du nombre de dérangements

4. Donner les valeurs de d_1 et d_2.

Pour tout entier i élément de E_n, on note A_i l'ensemble des permutations admettant au moins i pour point fixe.

$$A_i = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i\}$$

5. Démontrer que

$$S_n \backslash D_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

6. Étant donnés un entier k de E_n et k entiers deux à deux distincts $i_1,\ i_2, \cdots i_k$, justifier l'égalité

$$\text{card}\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right) = (n-k)!$$

7. Déduire des deux questions précédentes et de la formule du crible que

$$d_n = n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)!$$

8. Démontrer que

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Applications

9. On note p_n la probabilité qu'une permutation choisie au hasard de façon équiprobable dans S_n soit un dérangement.

   La suite (p_n) admet-elle une limite ? Si oui laquelle ?

10. On répartit au hasard n boules numérotées de 1 à n dans n urnes numérotées de 1 à n, en plaçant une boule par urne.

    On note X_n la variable aléatoire qui à une telle répartition associe le nombre de coïncidences entre le numéro de l'urne et celui de la boule qu'elle reçoit.

    10.1 Déterminer $P\,(X_n{=}0)$ et en déduire une expression de $P\,(X_n \geq 1)$.

    10.2 Démontrer que pour tout entier q de E_n, on a

$$P(X_n = q) = \frac{1}{q!} \sum_{k=0}^{n-q} \frac{(-1)^k}{k!}$$

    10.3 Démontrer que l'espérance de X_n est indépendante de n.

    On pourra écrire X_n sous forme d'une somme de variables aléatoires.